

verformung nimmt im Bereich II  $1/l$  proportional zur Abgleitung  $a$  zu (Abb. 3, Kurve C). Im Bereich III treten Abweichungen von dieser linearen Beziehung ein<sup>9</sup>, die an anderer Stelle eingehender behandelt werden sollen. Eine Zwischentorsion in Bereich II (Kurve D) bewirkt ganz analog zur Verfestigungskurve eine Parallelverschiebung der  $(1/l)$ - $a$ -Kurve. Das Verhältnis der Sprunghöhe  $\Delta(1/l)$  und der Fließspannungserhöhung  $\Delta\tau$  scheint (innerhalb  $\pm 10\%$ ) etwa gleich demjenigen der Steigungen  $d(1/l)/da$  und  $(d\tau/da)_{II}$  in den linearen Bereichen der beiden Kurven zu sein, d. h.

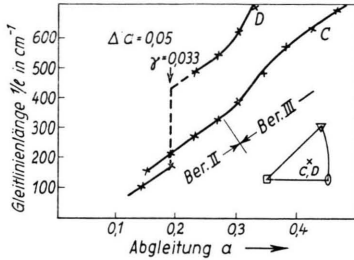


Abb. 3. Gleitlinienlänge in Abhängigkeit von der Abgleitung. C reine Zugverformung, D Zugverformung mit Zwischentorsion.

<sup>9</sup> Dieses Ergebnis weicht von demjenigen von BLEWITT, COLTMAN u. REDMAN ab, die angeben, daß  $1/l$  bis zu großen Abgleitungen linear mit  $a$  geht. Die eingezeichneten Meß-

punkte deuten jedoch auf ein ähnliches Verhalten wie bei unseren Messungen hin.

Insgesamt geht somit aus den kombinierten Zug-Torsions-Experimenten folgendes hervor: 1. Der starke Verfestigungsanstieg in Bereich II der Zugverfestigungskurve ist ohne Widersprüche mit einem andauernden, wenn auch geringen Mitgleiten sekundärer Gleitsysteme zu erklären. 2. Der entscheidende Einfluß dieses Mitgleitens ist im Gegensatz zu der von PAXTON und COTTRELL<sup>10</sup> gegebenen Interpretation ihrer Versuche an Al nicht das Dichterwerden des zu schneidenden Versetzungswaldes, sondern die Verkürzung der Versetzungslaufwege durch Bildung von schwer überwindbaren Hindernissen. 3. Die Übereinstimmung zwischen Oberflächenbeobachtungen und Verfestigungsmessungen weist erneut auf den engen Zusammenhang zwischen den Oberflächenerscheinungen und den Vorgängen im Kristallinnern hin.

Herrn Prof. Dr. U. DEHLINGER und Herrn Dr. A. SEEGER danken wir für wertvolle Anregungen und Diskussionen, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bereitstellung von Instrumenten.

<sup>10</sup> H. W. PAXTON u. A. H. COTTRELL, Acta Met. 2, 3 [1954].

## Spannungen und Dehnungen im gestörten elastischen Medium

VON GEORG RIEDER

Institut für Theoretische und Angewandte Physik und Max-Planck-Institut für Metallforschung der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforsch. 11 a, 171—173 [1956]; eingegangen am 30. Dezember 1955)

Ausgehend von der Behandlung der Wärmespannungen bei KRÖNER<sup>1</sup> gelangt man zu folgender allgemeiner Formulierung einer Dehnungstheorie der inneren Spannungen: Man zerlegt die Gesamtdehnung  $\varepsilon_g$ , welche die tatsächliche Endlage der Punkte des elastischen Mediums beschreibt, in eine spannungswirksame Dehnung  $\varepsilon_\sigma$  und eine vorgegebene (eingeprägte) Extradehnung  $\varepsilon_\lambda$

$$\varepsilon_g = \varepsilon_\sigma + \varepsilon_\lambda. \quad (1)$$

Die Extradehnung<sup>2</sup> kann man sich außer durch ungleichmäßige Erwärmung auch durch unendlich dicht liegende Schnitte mit infinitesimalen Verschiebungssprüngen erzeugt denken, während die spannungswirk-

same Dehnung durch das HOOKESCHE Gesetz

$$\sigma_g = c \cdot \varepsilon_\sigma \quad ((c \equiv (c_{ijkl}))) \quad (2)$$

mit der Gesamtspannung  $\sigma_g$  verknüpft ist, welche sich in der üblichen Weise durch die an einer gedachten Schnittfläche auftretenden Kräfte definieren läßt<sup>3</sup>. Die Auflösung nach den gesuchten Größen  $\varepsilon_g$ ,  $\varepsilon_\sigma$  und  $\sigma_g$  ergibt sich aus der Forderung, daß die Gesamtdehnung ein reiner Deformator, die Gesamtspannung eine reine Inkompatibilität<sup>4</sup> sein muß. Mit

$$\text{Ink } \varepsilon_\lambda = -\eta_\lambda \quad (3)$$

und

$$\sigma_g = \text{Ink } \chi \quad (4)$$

kommt man auf die Differentialgleichung

$$\text{Ink } (s \cdot \text{Ink } \chi) = \eta_\lambda \quad (s = c^{-1}). \quad (5)$$

Nach Auflösung dieser Gleichung folgt in einfacher Weise

$$\varepsilon_g = \varepsilon_\lambda + s \cdot \text{Ink } \chi = \text{Def } \vartheta + \varepsilon. \quad (6)$$

Der Eindeutigkeitsbeweis für die Spannungen ist unter sehr allgemeinen Bedingungen für das unendlich aus-

<sup>1</sup> E. KRÖNER, Z. angew. Phys. 7, 249 [1955].

<sup>2</sup> Bei H. REISSNER (Z. angew. Math. Mech. 11, 1 [1931]) als „Spannungsquellen“ oder „Anfangsformänderungen“ bezeichnet.

<sup>3</sup> (2) und die folgenden Gleichungen gelten auch für veränderliches  $c$ .

<sup>4</sup> Der Differentialoperator Ink ist erklärt durch

$$\text{Ink } \chi \equiv \nabla \times \chi \times \nabla.$$

Vgl. E. KRÖNER, l. c.<sup>1</sup> und Z. Phys. 139, 175 [1954]. Sonstige Bezeichnungen nach M. LAGALLY, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1949, Akademische Verlagsgesellschaft.



gedehnte elastische Medium ohne Schwierigkeiten zu führen; bei begrenzten Körpern überlagert sich noch ein Randwertproblem, das mit den klassischen Methoden der Elastizitätstheorie gelöst werden kann. Insbesondere ergibt sich dabei, daß die stets mögliche Zerlegung eines symmetrischen Tensorfeldes in Inkompatibilität und Deformator im unendlichen Medium bis auf einen konstanten Tensor auch eindeutig ist unter ähnlichen Bedingungen wie die Zerlegung eines Vektorfeldes in Quellen- und Wirbelfeld; es gelten also eindeutig die Zerlegungen

$$\sigma = \text{Ink } \chi + \text{Def } \mathfrak{s} + \bar{\sigma}, \quad (7)$$

$$\varepsilon = \text{Ink } \iota + \text{Def } \mathfrak{v} + \bar{\varepsilon}, \quad (8)$$

wo der Querstrich die arithmetische Mittelung über den ganzen Raum bedeutet. Zum Beispiel ist der konstante Anteil der Gesamtdehnung

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_g = \bar{\varepsilon}_\lambda + \bar{s} \cdot \text{Ink } \chi, \quad (9)$$

wobei der zweite Anteil für überall konstante Elastizitätskoeffizienten sicher verschwindet.

Es lag nahe<sup>5</sup>, in analoger Weise eine Spannungstheorie anzusetzen mit Hilfe einer Extraspannung  $\sigma_\lambda$  und einer dehnungswirksamen Spannung  $\sigma_\varepsilon$ :

$$\sigma_g = \sigma_\varepsilon + \sigma_\lambda, \quad (10)$$

$$\varepsilon_g = s \cdot \sigma_\varepsilon. \quad (11)$$

Die Auflösung nach den gesuchten Größen ergibt sich aus denselben Postulaten wie oben; man findet mit

$$\text{Div } \sigma_\lambda = q_\lambda, \quad (12)$$

$$\varepsilon_g = \text{Def } \mathfrak{v} + \bar{\varepsilon}, \quad (13)$$

die Gleichungen

$$\text{Div}[c \cdot (\text{Def } \mathfrak{v} + \bar{\varepsilon})] = -q_\lambda, \quad (14)$$

$$\sigma_g = \sigma_\lambda + c \cdot (\text{Def } \mathfrak{v} + \bar{\varepsilon}) = \text{Ink } \chi. \quad (15)$$

$q_\lambda$  kann als Volumenkraftdichte gedeutet werden<sup>6</sup>.

Es läßt sich nun zeigen, daß sich aus (14) und (15) dieselbe Gesamtspannung und dieselbe Gesamtdehnung ergibt wie aus (5) und (6), wenn nur

$$\sigma_\lambda = -c \cdot \varepsilon_\lambda \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_\lambda = -s \cdot \sigma_\lambda \quad (16)$$

gesetzt wird.

Diese Formel erlaubt nun eine wichtige Anwendung auf die phänomenologische Theorie der Magnetostraktion, indem sie es gestattet, die magnetoelastische Kopplung zu anderweitig verursachten inneren Spannungen in Beziehung zu setzen. Dazu braucht man nur die von AKULOV, BECKER und DÖRING<sup>7</sup> eingeführten magnetoelastischen Kopplungsglieder in geeigneter Weise zu

einem Tensor zusammenzufassen und diesen als Extraspannung zu deuten<sup>8</sup>. Zwischen Spannungs- und Dehnungstheorie entscheidet dann wegen (16) nur noch der Gesichtspunkt der mathematischen Zweckmäßigkeit.

Noch wichtiger sind die Gesichtspunkte, die sich daraus für die Berechnung der freien elastischen Energie in gestörten Medien ergeben. Denn für ein unendliches Medium liefert die Dehnungstheorie<sup>9</sup>

$$W_{\text{ink}} = \frac{1}{2} \int \sigma_g \cdot \varepsilon_\lambda \, d\tau = \frac{1}{2} \int \chi \cdot \eta_\lambda \, d\tau \quad (17)$$

und die Spannungstheorie

$$W_{\text{komp}} = \frac{1}{2} \int \sigma_\lambda \cdot \varepsilon_g \, d\tau = \frac{1}{2} \int q_\lambda \cdot \mathfrak{v} - \bar{\sigma}_\lambda \cdot \bar{\varepsilon} \, d\tau. \quad (18)$$

$W_{\text{komp}}$  bedeutet die Arbeit, welche die als konstant angenommenen Volumenkräfte beim Aufbau des elastischen Feldes aus dem unverzerrten Zustand abzugeben vermögen, oder auch die Arbeit, die man gewinnen könnte, wenn im verzerrten Gleichgewichtszustand die Extraspannung plötzlich verschwindet<sup>10</sup>.

$W_{\text{ink}}$  und  $W_{\text{komp}}$  sind im allgemeinen verschieden, dagegen ist ihre Summe

$$W_{\text{ink}} + W_{\text{komp}} = W_{\text{frei}} \quad (19)$$

mit der „Energie der freien Dehnung“

$$W_{\text{frei}} = \frac{1}{2} \int \varepsilon_\lambda \cdot c \cdot \varepsilon_\lambda \, d\tau \\ = \frac{1}{2} \int \sigma_\lambda \cdot s \cdot \sigma_\lambda \, d\tau = -\frac{1}{2} \int \sigma_\lambda \cdot \varepsilon_\lambda \, d\tau \quad (20)$$

von den eingetretenen elastischen Verzerrungen unabhängig und bereits durch die Extraspannung bzw. die Extradehnung allein bestimmt.

Nun lassen sich auch alle drei Energieterme sowohl vom Standpunkt der Spannungstheorie wie von dem der Dehnungstheorie durch Gedankenversuche physikalisch deuten.

In der Spannungstheorie geht man vom unverzerrten, spannungsfreien Medium aus. Zunächst führt man die Extraspannung ein, hält aber jeden Punkt durch Zwangskräfte in der ursprünglichen Lage fest. Dann hebt man die Zwangskräfte auf und läßt das elastische Medium in reversibler Weise in den Gleichgewichtszustand übergehen, wobei die Energie  $W_{\text{komp}}$  frei wird. Dann wird der Körper in genügend kleine Volumenelemente zerschnitten, die sich nun unter dem Einfluß der immer noch in ihnen wirksamen Extraspannung völlig frei dehnen und dabei die Energie  $W_{\text{ink}}$  in Form mechanischer Arbeit abgeben können. Der Gedankenversuch der Dehnungstheorie verläuft genau umgekehrt, indem das elastische Medium zunächst zerschnitten und im zerschnittenen Zustand die Extradehn-

<sup>5</sup> Eine zu (10) ähnliche Gleichung, allerdings mit anderen Vorzeichen, findet sich bei H. REISSNER<sup>2</sup>.

<sup>6</sup> Der Operator Def ist erklärt durch  $\text{Def } \mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \nabla)$ ; Vgl. KRÖNER<sup>1</sup>.

<sup>7</sup> R. BECKER u. W. DÖRING, Ferromagnetismus, Berlin 1939, Springer-Verlag.

<sup>8</sup> Die magnetostriktive Extraspannung im kubischen System ist z. B.

$$\sigma_\lambda = \begin{pmatrix} B_1 a_1^2 & B_2 a_1 a_2 & B_2 a_3 a_1 \\ B_1 a_2^2 & B_2 a_1 a_2 & B_2 a_3 a_2 \\ B_1 a_3^2 & B_2 a_1 a_3 & B_2 a_2 a_3 \end{pmatrix},$$

wo  $B_1$  und  $B_2$  wie bei C. KITTEL (Rev. Mod. Phys. **21**, 541 [1949]) die magnetoelastischen Kopplungskonstanten und  $a_1, a_2, a_3$  die ortsabhängigen Richtungs cosinus der Magnetisierung bedeuten.

<sup>9</sup> E. KRÖNER, l. c. <sup>1, 4</sup>.

<sup>10</sup> Die konstanten Terme in (18) erscheinen natürlich nur bei einem Spannungsfeld, das im Unendlichen nicht verschwindet und lassen sich dann als „Volumenkräfte im Unendlichen“ auffassen. Die Integration ist dann sinngemäß durch eine räumliche Mittelung zu ersetzen.

nung aufgebracht wird. Alle weiteren Schritte folgen durch sinngemäße Umkehrung des obigen Versuchs. Bei Anwendung auf die Theorie der Magnetostraktion ergibt sich, daß  $-W_{\text{frei}}$  bis auf eine bedeutungslose additive Konstante identisch ist mit dem „magnetostruktiven Teil“ der Kristallenergie.

Eine Erweiterung auf begrenzte elastische Körper ist dadurch möglich, daß man den Körper im Gedankenversuch zunächst in ein unendliches elastisches Medium einbettet und für dieses das Eigenspannungsproblem

### Ein stigmatisch abbildender doppelfokussierender Massenspektrograph

Von H. EWALD und G. SAUERMANN

Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. 11 a, 173–174 [1956]; eingegangen am 30. November 1955)

In einer kürzlichen Arbeit<sup>1</sup> wurden die ionenoptischen Abbildungseigenschaften von Toroidsektor-Kondensatoren angegeben. Wir haben den dort beschriebenen und erprobten Kondensator mit einem nachgeschalteten homogenen Magnetfeld zu einem Massenspektrographen kombiniert, der zusätzlich zur Doppelfokussierung erster Näherung längs einer ausgedehnten Bildgeraden etwa in Plattenmitte stigmatische Abbildung und auf der übrigen Platte beiderseits der Mitte mehr oder weniger angenäherte stigmatische Abbildung ergibt. In Analogie zum MATTAUCH-HERZOGschen Massenspektrographen haben wir  $l'_e = g_{re}$  und  $l''_{re} = -l'_m = \infty$  gewählt ( $l'_e$ =radiale und axiale Gegenstandsweite des Toroidkondensators,  $g_{re}$ =radialer Brennpunkt Abstand des Kondensators,  $l'_{re}$ =radiale Bildweite des Kondensators,  $l'_m$ =Gegenstandsweite des Magnetfeldes). Die Doppelfokussierungsbedingung lautet hierfür

$$2 \sin(\sqrt{2 - a_e/R_e} \Phi_e) / \sqrt{2 - a_e/R_e} = \sin \Phi_m + (1 - \cos \Phi_m) \tan \varepsilon'.$$

Speziell ist in unserem Fall  $a_e = 12$  cm,  $R_e = 9,6$  cm,

löst. Schneidet man dann den Körper wieder heraus, so sind an der freigewordenen Oberfläche Kräfte anzubringen, deren auf reversiblen Weg mögliche Arbeitsleistung bis zur Einstellung des endgültigen Gleichgewichtszustandes zu  $W_{\text{komp}}$  zu addieren und von  $W_{\text{ink}}$  abzuziehen ist.

Den Herren Prof. U. DEHLINGER, Dr. A. SEEGER und Dipl.-Phys. E. KRÖNER sei für zahlreiche Diskussionen und wertvolle Anregungen herzlich gedankt.

$\Phi_e = 29,7^\circ$ ,  $\Phi_m = 87,5^\circ$ ,  $\varepsilon' = 0$  ( $\Phi_m$ =mittlerer Ablenkwinkel der Strahlen im Magnetfeld,  $\varepsilon'$ =Winkel der in das Magnetfeld eintretenden Mittelstrahlen gegen die Normale zu den Polschuhgrenzen an der Eintrittsstelle).

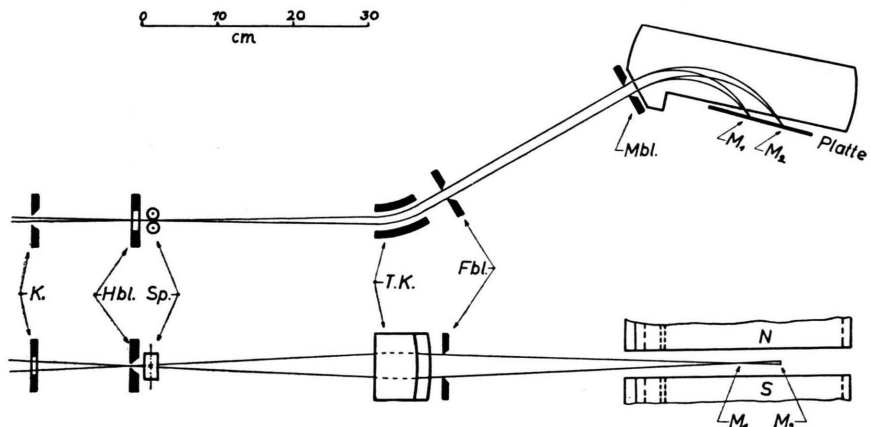
Abb. 1 erläutert in Horizontalschnitt und Seitenansicht den Strahlengang für je zwei Strahlen, die mit kleinen radialen bzw. axialen Winkeldivergenzen von einem Spalt ausgehen. Im Magnetfeld ist die Fokussierung für zwei verschiedene Massen gezeigt. Die eine trifft etwa in Plattenmitte auf, die andere ca. 5 cm daneben.

Die axiale Fokussierung wird bei  $\varepsilon' = 0$  allein durch den Toroidkondensator erzielt, nicht wie bei HERZOG<sup>2</sup> durch Kombination der axial fokussierenden Wirkung eines Kugelkondensators und der axial fokussierenden Wirkung des Streufeldes des Magnetfeldrandes, die auftritt, falls  $\varepsilon' \neq 0$  ist. In unserem Falle ist die axiale Bildweite  $l''_{ze}$  des Toroidkondensators gleich der Länge des Strahlenganges von der Austrittsgrenze des Kondensators bis zur Photoplatte. Bei HERZOG ist  $l''_{ze}$  ebenso wie  $l'_{re}$  gleich unendlich. Das Auflösungsvermögen von doppelfokussierenden Apparaten, die mit Toroidkondensator ausgerüstet stigmatische Abbildung liefern, ergibt sich allgemein zu

$$A = M/\Delta M = [a_e/s'_e (2 - a_e/R_e)] [1 + (l'_e - g_{re})/f_{re}],$$

also auch für solche Apparate, die reelle Energiebilder des Eintrittsspalt (Weite  $s'_e$ ) zwischen beiden Feldern besitzen. Speziell für  $l'_e = g_{re}$  ist  $A$  um einen Fak-

Abb. 1. Schematische Darstellung der radialen (oben) und axialen (unten) Fokussierung durch den stigmatisch abbildenden Massenspektrographen (K.=Kanal, Hbl.=Horizontalblende, Sp.=enger Eintrittsspalt, T.K.=Toroidkondensator, Fbl.=Feldblende, Mbl.=Magnetfeldblende).



<sup>1</sup> H. EWALD u. H. LIEBL, Z. Naturforschg. 10 a, 872 [1955].

<sup>2</sup> R. HERZOG, Z. Naturforschg. 8 a, 191 [1953].